**2. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques**

**2.1. Formes bilinéaires.**

**Définition 1 :** Soient  et  deux . Une application  de  vers  est dite bilinéaire s’elle vérifie les propriétés suivantes :







**Définition 2 :**  On appelle forme bilinéaire sur un  toute application bilinéaire de  vers .

**Remarque**: Pour toute forme bilinéaire  définie sur un  on a  .

En effet 

**Théorème 1 :** Soient  un  de dimension , muni d’une base  et  une application de  vers . Alors  est bilinéaire si, et seulement si, il existe une famille  d’ éléments du corps , tel que

 ,  **Démonstration :**

**1/****:** Supposons  bilinéaire. Soient   et . On a alors =   

. où pour tout  de , .

**2/**  On considère l’application  définie de  vers  comme suit :  , Montrons que  est bilinéaire :

(1) Soient et Alors  

(2) Soient et  Alors  

(3) Soient   et   

D’où  est bilinéaire.

De 1/ et 2/ on obtient l’équivalence voulue.

**Corollaire :** Soient un  de dimension finie,  une base de  et  une famille d’ éléments du corps . Il existe une, et une seule, forme bilinéaire  telle que pour tout  de , 

**Preuve :** Soient  une forme bilinéaire définie sur  telle que pour tout  de , ,  et  on a alors  

D’où  et l’unicité de 

**Définition 2’**: Soit  un  de dimension , muni d’une base . On appelle forme bilinéaire sur , toute application  de  vers  telle qu’il existe une famille d’éléments du corps  tel que  

**2.2 Représentation matricielle d’une forme bilinéaire** :

**Définition :**  Soient  un  de dimension ,  une base de  et  une forme bilinéaire définie sur  par :

 

La matrice carrée  d’ordre , s’appelle matrice de  relativement à la base .

**Exemple 1 :**  On considère le  muni de sa base canonique et la forme bilinéaire  définie sur  par :



Ecrire la matrice  de relativement à la base canonique.

**Solution :**  étant de dimension trois donc la matrice est d’ordre trois dont les éléments sont :

 

 

 







On a donc 

**Exemple 2 :**  On considère le  muni de sa base canonique et la forme bilinéaire  définie sur  par :



Ecrire la matrice  de  relativement à la base canonique.

**Solution :**  étant de dimension deux donc la matrice est d’ordre deux dont les éléments sont :

 

 

On a donc 

**Théorème 1 :** Soient  un  de dimension ,  une base de  et une forme bilinéaire définie sur  telle que. On alors

  tel que  où  et 

C’est-à-dire 

**Théorème 2 :** Soient  un  de dimension ,  et  deux bases de  et une forme bilinéaire définie sur  telle que et on a alors la formule suivante :  où est la matrice de passage de la base  à la base 

**2.3. Formes bilinéaires symétriques**

**Définition 1 :** Soit  un . Une forme bilinéaire  sur  est dite symétrique si 

**Remarque 1 :** Soient  un  de dimension ,  une base de  et  une forme bilinéaire définie sur  comme suit :



Pour tout  et de  on a l’équivalence suivante : 

**Définition 1’  :** Soient  un  de dimension ,  une base de  . On appelle forme bilinéaire symétrique sur  toute application  de  vers  définie comme suit :



. tel que 

**Remarque 2 :** Soient  un  de dimension  et  une forme bilinéaire symétrique définie sur . Alors la matrice de , relativement à une base ( quelconque )  de , est symétrique.

C’est-à-dire si , alors 

**Notation :** L’ensemble des formes bilinéaires symétriques sur un  se note .

**Exemple 1 :**  On considère la forme bilinéaire  définie sur le   comme suit:



Montrer que  est symétrique, c’est-à-dire 

**Solution :** Soient , on a alorsD’où la forme bilinéaire  est symétrique.

**Exemple 2 :** On considère la forme bilinéaire définie sur le  comme suit :

La forme bilinéaire est-elle symétrique ?

**Solution :**

On a  etdonc . D’où  n’est pas symétrique.

**2.4. Formes quadratiques :**

**Définition 1** : Soit  une forme bilinéaire symétrique définie sur un  . Une forme quadratique sur associée à  est une application  définie de  vers  comme suit : 

**Définition 1’:** Soient  un  de dimension ,  une base de . On appelle forme quadratique sur toute application  définie de  vers  telle qu’il existe une famille  d’éléments du corps  avec  et   **Définition  2:** Soient  un  de dimension ,  une base de  et  la forme quadratique définie sur comme suit :

 

La matrice carrée  d’ordre , s’appelle matrice de la forme quadratique  relativement à la base .

**Théorème 1 :** Soient  un  de dimension ,  une base de  et  une forme quadratique définie sur  dont la matrice relativement à  est . On a alors

 où le scalaire est défini par le produit matriciel suivant :

 

**Remarque :**  On a

 

**Théorème 2 :** Soient  un  de dimension ,  et  deux bases de  et  une forme quadratique définie sur  telle que et . On a alors la formule suivante :  où est la matrice de passage de la base  à la base 

**Exemple 1** : On considère la forme bilinéaire symétrique  définie sur le   comme suit: 

Définir la forme quadratique  associée à 

**Solution :**

 est l’application définie de  vers  comme suit :



On a donc 

**2.5. Forme polaire d’une forme quadratique**

Soient  un  de dimension ,  une forme bilinéaire symétrique définie sur  et  la forme quadratique associée à , on a alors

  

**Définition** 1: La forme bilinéaire symétrique définie ci-dessus , s’appelle forme polaire de la forme quadratique .

**Remarque :**  Soient  un  de dimension finie, une base de  et  une forme quadratique définie sur  comme suit :  

La forme polaire de  est la forme bilinéaire symétrique  définie sur  comme suit :

